

Maks Flyt

Ola Natvig

IDI - NTNU

19. oktober 2007

Agenda

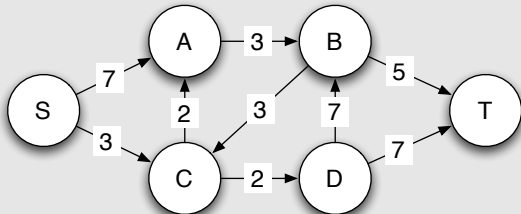
- 1 Flytnettverk
- 2 Kutt på flytnettverk
- 3 Maksimal flyt
- 4 Maksimal bipartit matching

Flytnettverk

Hva?

- En graf med “kapasitet” på kantene.
- Ønsker å sende “flyt” fra en kildenode s til et sluk t .

Eksempel

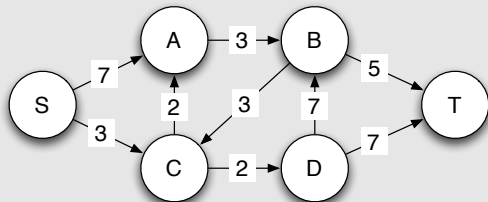


Flytnettverk

Hvordan?

- Kapasiteter kan representeres med nabomatriser, vi bruker $C = (c_{ij})$ der c_{ij} er lik kapasiteten fra node i til node j .
- Flyt kan også representeres med matriser, vi bruker $F = (f_{ij})$ der f_{ij} er lik flyten fra node i til node j .

Eksempel



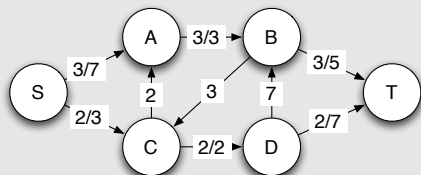
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Flytnettverk

Hvordan?

- Flyt kan også representeres med matriser, vi bruker $F = (f_{ij})$ der f_{ij} er lik flyten fra node i til node j .
- På grafene skriver vi flyt og kapasitet slik: (f_{ij}/c_{ij}) .

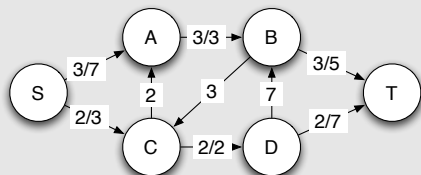
Eksempel



$$F = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Flytnettverk

Eksempel



$$F = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Merk!

- En flyt fra i til j er lik en negativ flyt fra j til i . $f_{ij} = -f_{ji}$
- Boka kaller dette "Skew-symetry".

Viktige egenskaper ved flyt

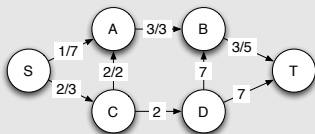
- $f_{ij} \leq c_{ij}$ - Selvfølgelig...
- $f_{ij} = -f_{ji}$ - "Skew-symetry"
- $\forall u \in (V - \{s, t\}) \sum_{v \in V} f_{uv} = 0$ - Bevaring av flyt, tenk *Kirchhoff's Current Law* flyt-inn = flyt-ut
- Total flyt: $|f| = \sum_{v \in V} f_{sv}$, kan dette finnes på en annen måte?
 - ▶ $|f| = \sum_{v \in V} f_{vt}$
- ($|\cdot|$ representerer flyt, ikke absoluttverdi eller kardinalitet)

Viktige definisjoner ved flyt

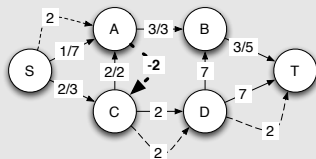
- Total positiv flyt inn i node v :
$$\sum_{\substack{u \in V \\ f_{uv} > 0}} f_{uv}$$
- Netto flyt i en node v : $\sum_{v \in V} f_{vu}$, er 0 for alle node bortsett fra s og t .
- Residualkapasitet (restkapasitet) ved en flyt f : $c_f(i, j) = c_{ij} - f_{ij}$
 - ▶ **Merk:** hvis for en gitt i og j , $c_{ij} = 0$ og $f_{ji} = 5 = -f_{ij}$ er $r_{ij} = 5$, dvs. vi har restkapasitet langs en kant der vi i utgangspunktet har 0 i kapasitet.
 - ▶ Vi kan øke flyten i grafen ved å “kanselere” flyt.
- Når vi ikke kan øke flyten, har vi *maks-flyt*

Flytnettverk

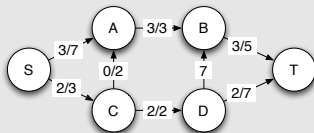
Kansellering av flyt



Figur: Graf med flyt



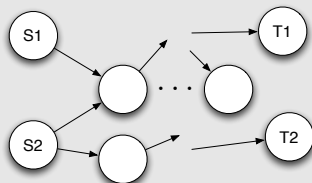
Figur: Kansellering av flyt



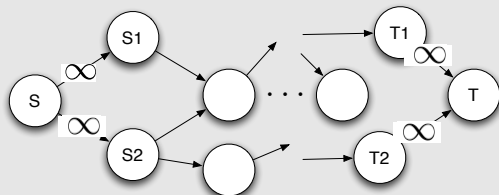
Figur: Ny flyt

Flytnettverk

Flere kilder, flere sluk



Superkilde, supersluk

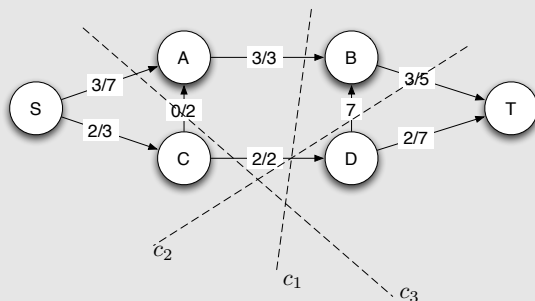


Kutt på flytnettverk

Hva?

- Del nettverkets noder i to partisjoner, S og T .
- $s \in S$ og $t \in T$

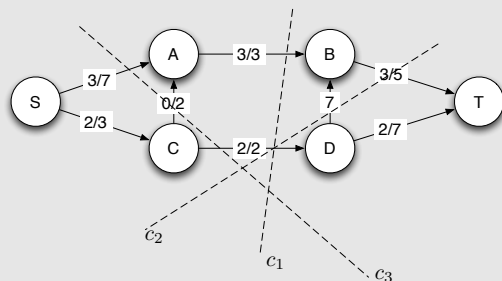
Eksempel



Figur: Ulike kutt

Kutt på flytnettverk

Eksempel

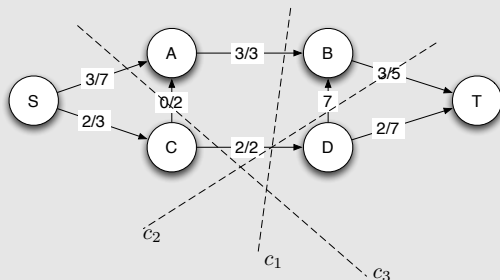


Definisjoner ved kutt

- Netto flyt over et kutt ($f(S, T)$): summen av flyt langs alle kanter som krysser kuttet.
 - ▶ $f(S_{c_1}, T_{c_1}) = 3 + 2 = 5$, $f(S_{c_2}, T_{c_2}) = 3 + 2 = 5$,
 $f(S_{c_3}, T_{c_3}) = 3 + 2 = 5$
 - ▶ $f(S, T) = |f|$ (Lemma 26.5 i Cormen)

Kutt på flytnettverk

Eksempel



Definisjoner ved kutt

- Kapasitet over et kutt ($c(S, T)$): summen av kapasitetene på kanter fra S til T .
 - ▶ **Merk:** ikke kapasiteter fra T til S .
 - ▶ $c(S_{c_1}, T_{c_1}) = 3 + 2 = 5$, $c(S_{c_2}, T_{c_2}) = 2 + 5 = 7$,
 $c(S_{c_3}, T_{c_3}) = 7 + 2 + 2 = 11$

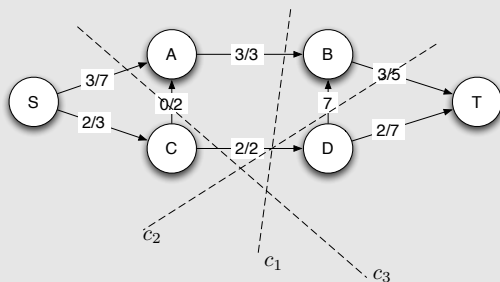
Kutt på flytnettverk

Maks-flyt, min-kutt teoremet

- I en graf $G = (V, E)$ med kilde s og sluk t er følgende utsagene ekvivalente
 - ▶ f er en maks-flyt i G
 - ▶ Det finnes ingen *flytforøkende stier* i G_f (mer om flytforøkende stier straks)
 - ▶ $|f| = c(S, T)$ for et kutt (S, T) på G
 - ★ **et slikt kutt er et min-kutt.**

Kutt på flytnettverk

Eksempel



Min-kutt

• Har vi et min-kutt her?

▶ **Ja:** c_1

Kutt på flytnettverk

Hva betyr min-kutt i praksis?

- Flaskehals

Maksimal flyt

Hva?

- Vi kan ikke kan sende mer flyt fra s til t .
- Min-kutt er fullt.
- Vi kan ikke finne noen *Flytforøkende sti* (en: *augmenting path*)

Maksimal flyt

Flytforøkende sti

- En sti fra s til t der alle kantene har tilgjengelig kapasitet.
 - ▶ $p = \langle (s, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_k, t) \rangle$ er en flytforøkende sti dersom $\forall (u, v) \in p, r_{uv} > 0$
 - ▶ Den flytforøkende stien kan øke flyten i nettverket med $c_f(p)$ enheter. $c_f(p) = \min_{(u,v) \in p} (r_{uv})$

Maksimal flyt

Generell metode for å finne maks flyt

- ① Sett flyt til 0
 - ② Finn en flytforøkende sti p
 - ③ Dersom det finnes p : Øk flyten langs p med $c_f(p)$, gjenta #2
 - ④ Vi har maks flyt
-
- Den generelle metoden kalles *Ford-Fulkerson*, vi utvider FF til løsninger på maks-flyt problemet.
 - Likt som med *Generic-MST* som vi utvider til *Prim* og *Kruskal*
 - “trygg kant” — “flytforøkende sti” analogi

Maksimal flyt

Kjørtid Ford-Fulkerson

- $O(E)$ å sette flyt til 0
- $O(E)$ å finne en *Flytforøkende sti* med f.eks. BFS eller DFS.
- Hvis flyten øker med 1 for hver flytforøkende sti (worst-case) må vi finne $|f^*|$ flytforøkende stier, der $|f^*|$ er den maksimale flyten
- Kjøretid for FF er derfor $O(E|f^*|)$

- Bra hvis $|f^*|$ er liten
- Ikke så bra dersom $|f^*|$ er en veldig stor verdi

Maksimal flyt

Edmonds-Karp

- Bruker BFS til å finne flytforøkende sti
- Dette gir den korteste (i antall kanter) flytforøkende stien
- Øker flyten maks $O(VE)$ ganger, dette gir total kjøretid på $O(VE^2)$

Maksimal flyt

Bevis Edmonds-Karp kjøretid: Kritisk kant

- En kant (u, v) i en gitt flytforøkende sti p er **kritisk** dersom:
 $c_f(u, v) = c_f(p)$ dvs. den kanten med minst restkapasitet på stien.
- Alle flytforøkende stier har minst en **kritisk** kant.
- Når vi har økt flyten på en flytforøkende sti, forsvinner kritiske kanter på stien.
- Vi skal bevise at grafens $|E|$ kanter ikke kan bli kritisk mer enn $\frac{|V|-2}{2}$ ganger.

Maksimal flyt

Bevis Edmonds-Karp kjøretid

- Siden forøkende stier også er korteste stier i residualnettverket vet vi at den første gang en gitt kant (u, v) kan bli kritisk er $\delta_f(s, v) = \delta_f(s, u) + 1$
- Når flyten økes forsvinner (u, v) fra residualnettverket og kan ikke bli med på en forøkende sti før flyten fra u til v skal senkes.
- Noe som skjer når (v, u) ligger på en forøkende sti. f' er flyten når dette skjer.
- Da holder fortsatt:

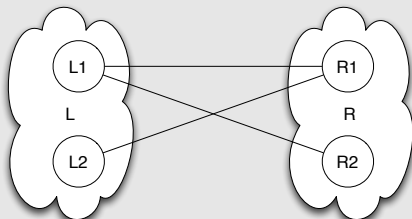
$$\begin{aligned}\delta_{f'}(s, u) &= \delta_{f'}(s, v) + 1 \\ &\geq \delta_f(s, v) + 1 \\ &= \delta_f(s, u) + 2\end{aligned}$$

Maksimal flyt

Bevis Edmonds-Karp kjøretid

- Stilenlengden første gang (u, v) er kritisk er altså minst 2 kanter kortere enn neste gang den kan være kritisk.
- Avstanden er første gang, minst 0, siden s og t ikke kan være mellomliggende noder på en flytforøkende sti er den lengste stien $|V| - 2$
- En gitt kant kan altså ikke være kritisk mer enn $\frac{|V|-2}{2}$ ganger.
- Det finner $|E|$ mulige kritiske kanter, og siden en forøkende sti alltid “bruker” minst en kritisk kant, finnes det maks $O(EV)$ kritiske stier. □

Maksimal bipartite matching



Hva er en bipartite graf?

- En graf $G(V, E)$ der V kan deles i to partisjoner L or R der følgende utsagn holder:
 - ▶ Ingen node i L har en kant til en annen node i L , ingen node i R ...
 - ▶ Hvis vi farger alle nodene i L blå og alle i R røde finnes det ingen kanter som har lik farge i begge ender.

Maksimal bipartite matching

Hva er en bipartite matching?

- En matching for en bipartite graf $G = (V, E)$ er et subset $M \subseteq E$ slik at for grafen $G' = (V, M)$ holder følgende utsagn
 $\forall v \in V \deg(v) \leq 1$
- Hvis en gitt node $v \in V$ har $\deg(v) = 0$ er noden umatchet, hvis $\deg(v) = 1$ er noden matchet.

Hva er en maksimal bipartite matching?

- En bipartite matching der $|M|$ er størst mulig.